

## MODELAGEM DA CONDUÇÃO DE CALOR BIDIMENSIONAL ORTOTROPICA EM GESSO POROSO

Souza, C. R. N.\*<sup>1</sup>Alencar Júnior, J. P.<sup>1</sup> Ferraz, A. V.<sup>1</sup>, Dantas, A. C. S.<sup>1</sup>

\*carlosnuneseng@gmail.com

<sup>1</sup> Universidade Federal do Vale do São Francisco, Campus Juazeiro, Av. Antônio Carlos Magalhães, 510 Santo Antônio 48902300 - Juazeiro, BA

**Resumo:** O gesso é um material versátil que apresenta baixa condutividade térmica, o que o torna muito apropriado para aplicação como isolamento térmico. O aumento da porosidade tende a promover uma diminuição da condutividade térmica dos corpos otimizando este material para aplicações de isolamento térmico. Este trabalho tem como objetivo a modelagem computacional da condução de calor bidimensional por diferenças finitas em regime permanente para verificar a ortotropia da condutividade térmica do gesso para diferentes porosidades utilizando os elementos aplicados no método da placa quente protegida. Foram realizadas simulações computacionais utilizando valores de condutividade térmica de 0,35 W/m.K variando-se este valor na direção  $x$  em 5%, 10% e 15%. O fluxo de calor aplicado nas simulações numéricas foram iguais 75 W/m<sup>2</sup>, 100 W/m<sup>2</sup> e 125 W/m<sup>2</sup>. Foi possível produzir perfis de temperatura nos quais é visível o deslocamento das isotermas em função da variação da condutividade térmica na direção  $x$ .

Palavras-chave: Condutividade térmica, ortotropia, diferenças finitas e gesso.

### INTRODUÇÃO

A produção de novos materiais, que apresentam características desejadas e que desempenhem suas funções da melhor forma possível, é um dos principais objetivos da engenharia moderna. O gesso apresenta baixa condutividade térmica, sendo considerado um mal condutor de calor, característica essa atribuída a presença de grandes vazios nos espaços inter cristalinos, chegando a ser de 3 a 4

vezes menos condutor do que o concreto (1). A porosidade diminui a condutividade térmica do material já que o ar, que fica nos poros, possui baixa condutividade térmica (0,023 W/m.K), constituindo um elemento muito resistente à passagem de calor. O conhecimento das propriedades térmicas do gesso em especial a condutividade térmica e de fundamental importância para o desenvolvimento de novas aplicações para o gesso de modo a otimizar a utilização deste material tão abundante em nosso solo (2).

Dentre os principais métodos utilizados para determinação de propriedades térmicas em materiais se destaca o método da placa quente protegida (3). A técnica se tornou muito bem estabelecida e documentada na norma ISO 8302 (1991), e agora é indiscutivelmente reconhecida como a técnica mais precisa para determinar a condutividade térmica de diferentes materiais, tendo uma incerteza de cerca de 1,5% em relação a uma faixa de temperatura limitada perto da temperatura ambiente (4).

Para a análise do comportamento direcional da condutividade térmica é de grande importância se fazer uso de algum método numérico para determinar o perfil de temperaturas gerado em função da propriedade térmica em questão. Para tal foi elaborado um problema de condução de calor bidimensional em regime permanente, sem geração de calor e convecção com o objetivo de modelar um experimento utilizando os elementos utilizados no método da placa quente protegida usado para determinação da condutividade térmica. Diversos métodos de solução para o problema de condução de calor bidimensional têm sido abordados em uma série de livros. (5) apresenta uma extensa exposição sobre as técnicas analíticas como o método de separação de variáveis, método da superposição, método da função de Green, método da transformada de Laplace, método da transformada integral, métodos analíticos aproximados e método de diferenças finitas.

O objetivo deste trabalho foi utilizar o método das diferenças finitas para prever o comportamento de blocos de gesso em presença de porosidade utilizando os elementos do método da placa quente protegida, como auxílio na modelagem. Através da simulação, além da visualização do comportamento do fenômeno, é possível validar os dados obtidos da literatura e estender estes dados a outras condições não encontradas nos materiais de pesquisa (6).

## MATERIAIS E METODOS FORMULAÇÃO MATEMÁTICA

### PROBLEMA FÍSICO

Considere um problema de condução de calor bidimensional em uma placa de gesso poroso sujeita as seguintes condições de contornos, metade da superfície inferior esta sujeita a um fluxo de calor proveniente de uma placa quente e a outra metade isolada termicamente, metade da superfície superior esta isolada termicamente e a outra metade sujeita a uma condição de contorno de temperatura prescrita, as superfícies laterais estão isoladas. Com essa configuração o fluxo de calor que flui em uma direção torna-se bidimensional permitindo assim analisar o comportamento direcional da condutividade térmica.

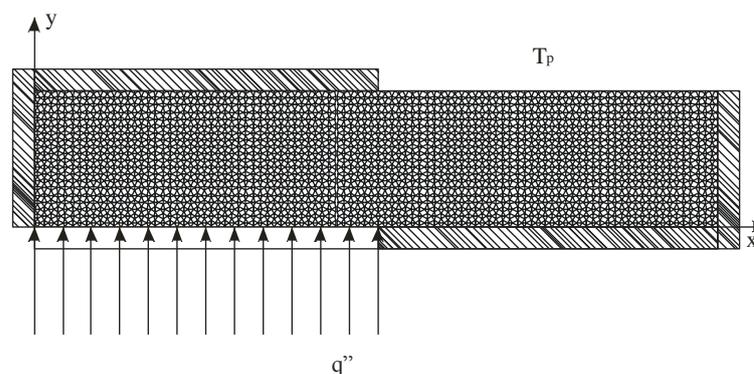


Figura 1: Esquema representativo do modelo físico.

As seguintes hipóteses são feitas: condução de calor bidimensional, a placa de gesso é homogênea e ortotrópica, todas as propriedades termofísicas são conhecidas e constantes, conhecemos o fluxo de calor na superfície, conhecemos as dimensões da placa.

### MODELAGEM MATEMÁTICA

Assim o modelo matemático que descreve o problema é dado por:

Equações Diferenciais

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( k_x \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( k_y \frac{\partial T}{\partial y} \right) = 0 \quad 0 < x < L, 0 < y < e \quad (A)$$

### Condições de Contorno

$$\frac{\partial T}{\partial x} = 0, \quad x = 0, \quad 0 \leq y \leq e \quad (\text{B})$$

$$\frac{\partial T}{\partial x} = 0, \quad x = L, \quad 0 \leq y \leq e \quad (\text{C})$$

$$k_y \frac{\partial T}{\partial y} = q'', \quad y = 0, \quad 0 \leq x \leq \frac{L}{2} \quad (\text{D})$$

$$\frac{\partial T}{\partial y} = 0, \quad y = 0, \quad \frac{L}{2} < x \leq L \quad (\text{E})$$

$$\frac{\partial T}{\partial y} = 0, \quad y = e, \quad 0 \leq x < \frac{L}{2} \quad (\text{F})$$

$$T = T_p, \quad y = e, \quad \frac{L}{2} \leq x \leq L \quad (\text{G})$$

### Modelagem

Foi realizada uma modelagem numérica do comportamento direcional da condutividade térmica, utilizando o método das diferenças finitas para determinação do perfil de temperaturas na placa para verificar o posicionamento das isotermas.

A solução do sistema linear formado pelas equações de diferenças finitas foi obtida pelo método de Gauss-Seidel, já que esse tem como características a redução das exigências computacionais, menor tempo de processamento, fácil implementação e é especialmente apropriado para sistemas com alto número de equações. Este método numérico é aplicado na solução de sistemas lineares em que  $a_{ij}$  e  $C_i$  são os coeficientes conhecidos e  $T_i$  são as incógnitas, o método de Gauss-Siedel calcula o valor de um elemento da solução utilizando para isso os valores mais recentes das demais soluções.

O vetor solução do método iterativo de Gauss-Siedel tem a forma mostrada pela equação (H) a seguir:

$$T_i^{(p)} = \frac{c_i}{a_{ii}} - \sum_{j=1}^{i-1} \frac{a_{ij}}{a_{ii}} T_j^{(p)} - \sum_{j=i+1}^n \frac{a_{ij}}{a_{ii}} T_j^{(p-1)} \quad (\text{H})$$

Em que  $i = 1, 2, \dots, N$ . O índice  $p$  refere-se ao nível de iteração.

O processo iterativo é concluído quando um critério de convergência é satisfeito. O critério pode ser expresso como:

$$\left| T_i^{(p)} - T_i^{(p-1)} \right| < \varepsilon \quad (I)$$

Sendo  $\varepsilon$  uma tolerância preestabelecida.

Sempre que possível, às equações do sistema linear devem ser ordenadas para fornecer elementos da diagonal principal cujas magnitudes sejam maiores do que outros elementos da mesma coluna. Dessa forma o sistema resultante é dito como sendo diagonalmente dominante e a taxa de convergência é maximizada, diminuindo o número de iterações. Contudo, a convergência também pode ser alcançada em muitas situações para as quais a dominância não pode ser obtida, embora a taxa de convergência seja mais lenta. (7).

A modelagem computacional foi desenvolvida na linguagem Fortran 90. O objetivo foi observar o comportamento da temperatura com a variação da condutividade térmica nos corpos de gesso com diferentes porosidades.

## RESULTADOS E DISCUSÃO

Para realização da simulação computacional foram estabelecidos alguns parâmetros. O fluxo de calor na superfície da placa é de  $100 \text{ W/m}^2$ , fornecido pela placa quente, o comprimento da placa e sua espessura são respectivamente  $307 \text{ mm}$  e  $27,7 \text{ mm}$ , a temperatura prescrita utilizada foi a de  $0^\circ\text{C}$ . (8) citam que a condutividade térmica das argamassas de gesso é de  $0,53 \text{ W/m}^\circ\text{C}$  e em forma de placas,  $0,35 \text{ W/m}^\circ\text{C}$ , já que esta é a forma com a qual o teste da placa quente é realizado, sendo o valor de  $0,35 \text{ W/m}^\circ\text{C}$  utilizado na simulação numérica. A malha utilizada possui 299 nós horizontais e 80 nós verticais. Para a escolha dessa malha foi feita uma análise de convergência de malhas, na figura 2 é possível observar os perfis de temperatura gerados com malhas menos refinadas.

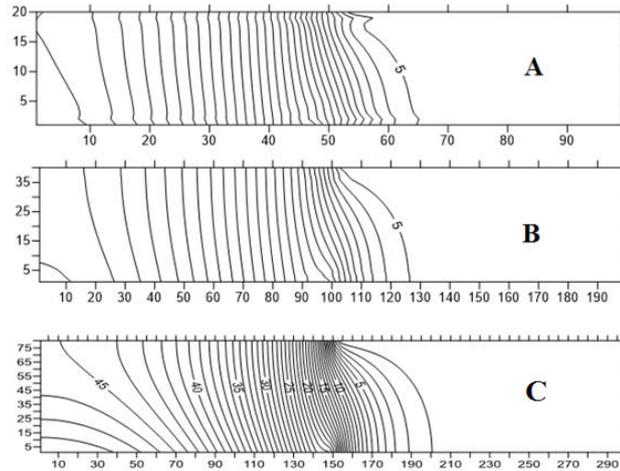


Figura 2: Perfis de temperatura gerados para análise de convergência de malhas. Perfil gerado com malhas de 99 x 20 (figura 7A), 199x40(figura 7B) e 299x80 (figura 7C).

Sabendo que o método da placa quente protegida determina a condutividade térmica na direção  $y$  foram obtidos perfis de temperatura para a variação da condutividade térmica na direção  $x$ , enquanto que  $k_y$  foi mantida constante. A tolerância aceita como critério de parada foi de  $10^{-3}$ . Os perfis de temperatura com os dados de saída da simulação computacional podem ser observados nas figuras 3, 4, 5.

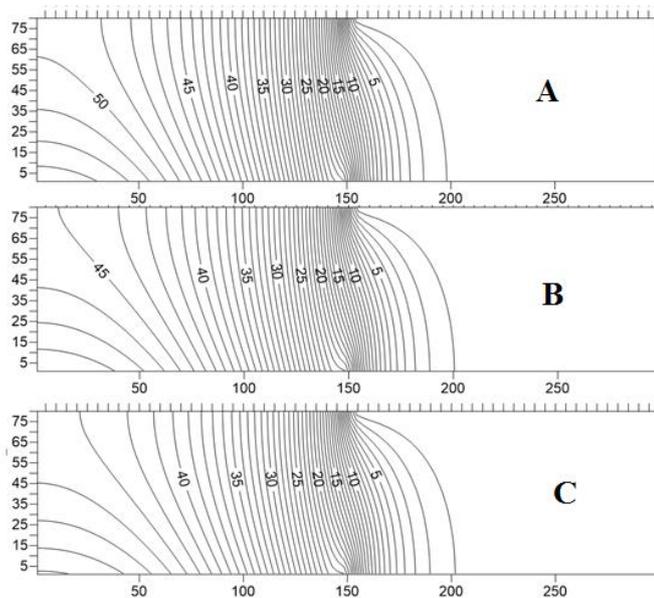


Figura 3: Perfis de temperatura gerados para uma variação de 5% na condutividade térmica na direção  $x$  e fluxo de  $100 \text{ W/m}^2$ .  $k_x=0,95k_y$  (figura 8 A),  $k_y=k_x$  (figura 8 B) e  $k_x=1,05k_y$  (figura 8 C).

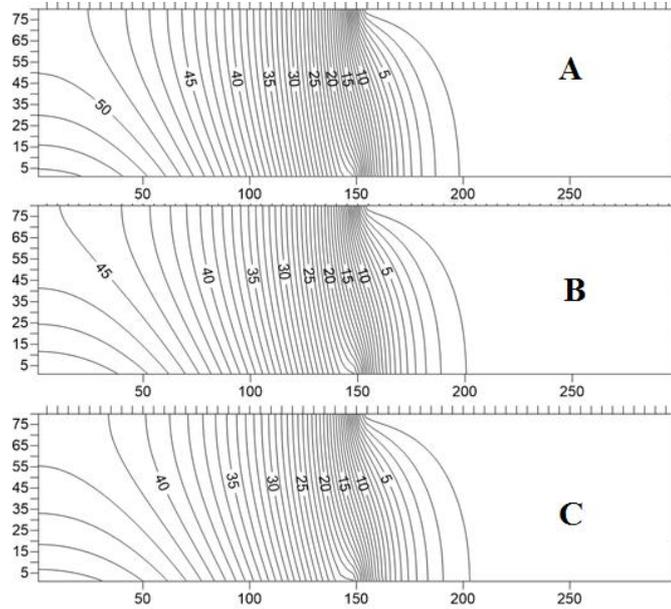


Figura 4: Perfis de temperatura gerados para uma variação de 10% na condutividade térmica na direção  $x$  e fluxo de  $100 \text{ W/m}^2$ .  $k_x = 0,90k_y$  (figura 9 A),  $k_y = k_x$  (figura 9 B) e  $k_x = 1,10k_y$  (figura 9 C).

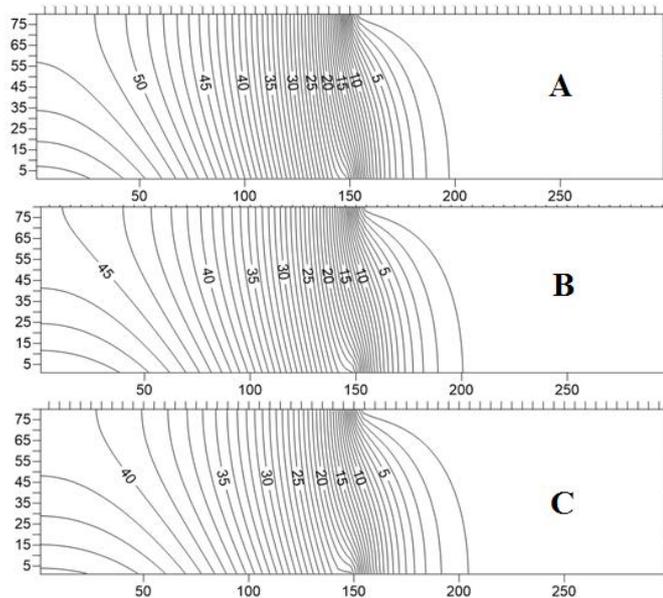


Figura 5: Perfis de temperatura gerados para uma variação de 15% na condutividade térmica na direção  $x$  e fluxo de  $100 \text{ W/m}^2$ .  $k_x = 0,85k_x$  (figura 10 A),  $k_y = k_x$  (figura 10 B) e  $k_x = 1,15k_y$  (figura 10 C).

Para isso, variações de 5%, 10% e 15% nas condutividades térmicas na direção  $x$  foram consideradas, enquanto na direção  $y$  o valor era mantido constante e igual a  $0,35 \text{ W/m.K}$ , com o objetivo de detectar a ortotropia da condutividade térmica.

Pode ser observada nos perfis de temperatura mostrados nas figuras 3 a 5 a influência da variação da condutividade pelo deslocamento das isotermas.

Foram selecionados pontos nas superfícies superior, inferior, laterais da placa para que suas temperaturas fossem identificadas, além de um ponto no interior da placa. Estes pontos são mostrados na figura 6.

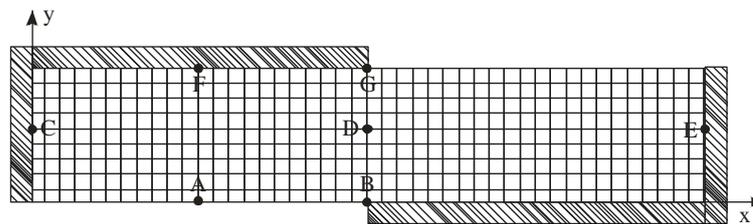


Figura 6: Localização dos pontos A, B, C, D, E e F no modelo físico utilizado na modelagem computacional.

O valor do fluxo de calor foi alterado para os valores de  $75 \text{ W/m}^2$  e  $125 \text{ W/m}^2$  para avaliar a perturbação que essa variável causa nos pontos considerados. Nas tabelas 2, 3 e 4 são mostradas as variações de temperatura nos pontos selecionados em função da mudança da condutividade térmica na direção  $x$  quando comparadas aos valores de temperaturas obtidas quando a condutividade térmica é isotrópica (em destaque nas tabelas).

Tabela 2: Variação da temperatura dos pontos selecionados em relação a condutividade térmica isotrópica (em destaque) para o fluxo de calor de  $75 \text{ W/m}^2$  e condutividade térmica variando em  $x$ .

Condutividade térmica constante (W/m.K)	Variação da condutividade térmica (%)	Variação de temperatura dos pontos selecionados em C°						
		A	B	C	D	E	F	G
Ky = 0,35	Kx = 0,85 ky	1,064	3,252	0,774	0,790	0,055	4,004	1,796
	Kx = 0,90 ky	0,705	2,143	0,511	0,526	0,042	3,646	1,778

Kx = 0,95 ky	0,325	1,013	0,231	0,254	0,030	3,265	1,762
Kx = ky	27,136	24,224	25,119	11,789	1,977	24,196	3,724
kx = 1,05 ky	-0,269	-0,933	-0,180	-0,247	-0,054	-0,128	-1,801
Kx = 1,10 ky	-0,522	-1,758	-0,353	-0,467	-0,099	-0,253	-1,845
Kx = 1,15 ky	-0,726	-2,393	-0,494	-0,639	-0,131	-0,357	-1,878

Tabela 3: Variação da temperatura dos pontos selecionados em relação à condutividade térmica isotrópica (em destaque) para o fluxo de calor de 100 W/m<sup>2</sup> e condutividade térmica variando em x

Condutividade térmica constante (W/m.K)	Variação da condutividade térmica (%)	Variação de temperatura dos pontos selecionados em °C						
		A	B	C	D	E	F	G
Ky = 0,35	Kx = 0,85 ky	10,516	8,934	13,105	3,537	0,003	9,855	0,922
	Kx = 0,90 ky	7,106	5,767	-13,592	2,310	0,000	6,665	0,608
	Kx = 0,95 ky	3,429	2,637	4,360	1,068	-0,001	3,221	0,284
	Kx = ky	44,201	26,701	46,061	13,019	0,008	40,271	4,267
	kx = 1,05 ky	-3,324	-2,233	-4,314	-0,922	0,007	-3,135	-0,250
	Kx = 1,10 ky	-6,879	-4,107	-9,003	-1,710	0,039	-6,518	-0,469
	Kx = 1,15 ky	-11,675	-5,075	-15,241	-2,099	0,342	-11,177	-0,592

Tabela 4: Variação da temperatura dos pontos selecionados em relação à condutividade térmica isotrópica (em destaque) para o fluxo de calor de 125 W/m<sup>2</sup> e condutividade térmica variando em x

Condutividade térmica constante (W/m.K)	Variação da condutividade térmica (%)	Variação de temperatura dos pontos selecionados em °C						
		A	B	C	D	E	F	G
Ky = 0,35	Kx = 0,85 ky	13,555	12,956	16,113	5,123	0,009	12,726	1,320
	Kx = 0,90 ky	9,258	8,481	11,068	3,404	0,006	8,706	0,889
	Kx = 0,95 ky	4,507	3,942	5,421	1,608	0,002	4,245	0,426
	Kx = ky	72,078	40,002	80,455	19,809	0,006	67,160	6,559
	kx = 1,05 ky	-4,288	-3,454	-5,219	-1,449	-0,002	-4,053	-0,393
	Kx = 1,10 ky	-8,378	-6,500	-10,251	-2,759	-0,003	-7,928	-0,758
	Kx = 1,15 ky	-11,735	-8,835	-14,423	-3,786	-0,004	-11,117	-1,050

## CONCLUSÕES

Com base nos resultados apresentados, a modelagem computacional para o modelo físico adotado, é possível identificar a ortotropia da condutividade térmica na direção x. Desta forma atingindo o objetivo de que é possível analisar a ortotropia da condutividade térmica em um experimento que utiliza os elementos usados no

método da placa quente protegida e com isso poder complementar as análises feitas.

A utilização de problema inverso para uma análise mais precisa da ortotropia da condutividade térmica do gesso poroso é uma sugestão para sequência deste trabalho. Outra sugestão é a construção do equipamento para realização do teste da placa quente protegida e também a execução de um ensaio nas condições para as quais este trabalho foi elaborado.

A ausência de um centro de usinagem na universidade que permitisse a construção do equipamento para realização dos testes aliada ao fato de não ser encontrar chapas espessas de material de condutividade térmica adequada para a realização dos testes foi a principal dificuldade para a realização do experimento. Dessa forma impedindo a comparação dos dados experimentais com os resultados obtidos pela simulação computacional.

## REFERÊNCIAS

1. PERES, L., BENACHOUR, M., SANTOS, V. A., **Gesso: produção e utilização na construção civil** – Sebrae, Recife, 2008.
2. FIGUEIREDO, E. R. H. **Condutividade Térmica de Rochas: Uma aplicação para Granitos Ornamentais**. - Dissertação (Mestrado em geofísica e geodinâmica) - programa de pós-graduação em geofísica e geodinâmica – PPGG - UFRN, Universidade federal do Rio grande do Norte 2006.
3. JANNOT, Y.; FELIX, V.; DEGIOVANNI, A. **A centered hot plate method for measurement of thermal properties of thin insulating materials**. Measurement Science and Technology, v. 21, n. 3, p. 035106, 2010.
4. SALMON, DAVID. **Thermal conductivity of insulations using guarded hot plates, including recent developments and sources of reference materials**. Centre for Basic, Thermal and Length Metrology, National Physical Laboratory, Teddington, Middlesex TW11 0LW, UK
5. OZISIK, M.N. **Heat conduction**, JohnWiley & Sons, INC, New York, NY, USA., 1980.
6. FERNANDES, M.P.G, ROCHA, P.A.C, MODOLO, A.B. **Estudo da convergência de malha na solução numérica de escoamento sobre perfil aerodinâmico utilizando o OpenFOAM**. In:XXXVII Congresso Brasileiro de Educação em Engenharia, 2009, Recife, Anais do XXXVII Congresso Brasileiro de Educação em Engenharia, 2012. Disponível em:<http://www.abenge.org.br/CobengeAnteriores/2009/artigos/505.doc>. Acesso em 10 de agosto de 2013.

7. INCROPERA, Frank. P. Dewitt, David P. **Fundamentos de transferência de calor e massa.** Tradução Carlos Alberto Biolchini da Silva. 5ª ed. Rio de Janeiro: LTC, 2003.
8. FROTA, ANÉSIA BARROS; SCHIFFER, SUELI CAMPOS. **Manual de conforto térmico.** Ed. Studio Nobel. 2001. 5ª Edição. 243p.

## MODELING OF TWO-DIMENSIONAL ORTHOTROPIC HEAT CONDUCTION IN POROUS GYPSUM

The gypsum is a versatile material that shows low thermal conductivity, which makes this material very suitable for application as thermal insulation. The increase of the porosity of the gypsum bodies promotes a decrease on the thermal conductivity. This effect optimizes the range of applications of gypsum on the thermal insulation field. The present study aimed the numerical modeling of two-dimensional heat conduction by finite differences in a steady state to evaluate the orthotropy of the thermal conductivity of porous gypsum using the elements of the protected hot plate method. Computer simulations were performed using thermal conductivity of the gypsum equal to  $0.35 \text{ W / m.K}$ . This value was varied on the x and y directions by 5%, 10% and 15%. The heat flow applied to the numerical simulations were equal  $75 \text{ W / m}^2$ ,  $100 \text{ W / m}^2$  to  $125 \text{ W / m}^2$ . It was possible to produce temperature profiles where is visible the displacement of isotherms as a function of the change in thermal conductivity in the x direction.

Keywords: thermal conductivity, orthotropy, finite differences and gypsum.