

MODELAMENTO ANALÍTICO DA TRANSFERÊNCIA DE CARGA EM COMPOSTOS CERÂMICA-CERÂMICA DE FIBRAS CURTAS

Silva, J. G. P. da¹; Hotza, D^{1,2}; Al-Qureshi, H. A^{1,3}.

1 – Programa em Pós-graduação de Engenharia de Materiais – PGMAT/UFSC

2 – Departamento de Engenharia Química – EQA / UFSC

3 – Centro de Engenharia de Mobilidade – CEM / UFSC

RESUMO

Neste trabalho, é proposto um modelo de transferência de carga entre matriz porosa e fibra, compostas do mesmo material cerâmico, aqui exemplificado em compósitos alumina-fibra de alumina para aplicação em sistemas que suportam cargas mecânicas à altas temperaturas. O modelo é baseado nos modelos atuais de transferência de carga em materiais compósitos poliméricos, utilizando-se das devidas aproximações. Procura-se relacionar os parâmetros geométricos da fibra e a porosidade da matriz com o comprimento mínimo de fibra em que a tensão máxima suportada no centro da fibra é equivalente ao máximo suportável, assim maximizando a eficiência do reforço fibroso.

INTRODUÇÃO

Compósitos cerâmicos com aplicações estruturais possuem uma gama de propriedades únicas que não podem ser atingidas por outros materiais. Por exemplo, as cerâmicas combinam alta dureza, resistência mecânica e resistência ao desgaste com baixa densidade e a habilidade de suportar altas temperaturas, bem como ambientes corrosivos. Assim, tais materiais possuem um amplo potencial para a economia de energia, reduzir perdas tribológicas e aumentar o tempo de vida de componentes [1].

Entretanto, apesar de suas excelentes propriedades, tais materiais não são amplamente utilizados na indústria como deveriam. Entre as razões da relutância da indústria para a introdução de elementos estruturais cerâmicos estão [1]:

- Alto preço dos componentes;

- Falta de conhecimento na Engenharia “Tradicional”, que utiliza elementos metálicos;
- Baixa Tenacidade à Fratura;
- Reprojetado de componentes para atender a requisitos do material.

Em se tratando de compósitos cerâmicos, o fator preço é ainda o maior limitante em termos de aplicações comerciais. Isto é verdade especialmente para componentes feitos de compósitos com estruturas complexas e que requerem performance mecânica e confiabilidade. Neste intuito, compósitos cerâmicos reforçados com fibras foram desenvolvidos de modo a superar a fragilidade e falta de confiabilidade das cerâmicas monolíticas. Suas vantagens são resistência a alta temperatura, baixa densidade, melhor resistência à corrosão e adequada resistência ao dano [2].

Existe uma ampla gama de compósitos cerâmicos reforçados com fibras dependendo da composição química da matriz e do reforço, apesar de que atualmente apenas os compósitos de Cf-C/SiC produzidos por infiltração de silício tenham atingido produção comercial. Entretanto, compósitos cerâmicos reforçados com fibras baseados em óxidos (Alumina, Mulita) podem oferecer vantagens essenciais a respeito da estabilidade em longo prazo sob atmosferas oxidantes [2].

Apesar do considerável interesse em Compósitos Cerâmicos Óxidos na década passada [3,4,5], ainda não há um conceito de produção que atenda os requisitos nas vistas de custo e performance. Esta será uma das problemáticas atacadas neste trabalho, de modo a possibilitar o projeto de componentes cerâmicos de fibras curtas.

Este trabalho tem o objetivo geral de investigar o fenômeno de transferência de carga em compósitos cerâmica-cerâmica de fibras curtas, utilizando um modelo matemático simplificado que visa prever a real eficácia do reforço dependendo das propriedades do material de entrada (comprimento de fibra, material da matriz, porosidade da matriz, material da fibra).

MODELAMENTO MATEMÁTICO

Considerações e Análise do Problema

Considerando uma fibra sem porosidade de comprimento $2L$ embebida em uma matriz porosa do mesmo material da fibra, submetida à deformação e assumindo que existe uma colagem perfeita entre fibra e matriz, ou seja, não ocorre escorregamento entre ambas. Também deve ser considerado que o coeficiente de Poisson de ambas é igual, o que implica na inexistência de tensões transversais quando uma carga é aplicada ao longo da direção da fibra. Considerando o deslocamento de um ponto a uma distância (de uma extremidade da fibra, sendo u na presença da fibra e v na ausência da mesma (Figura 1):

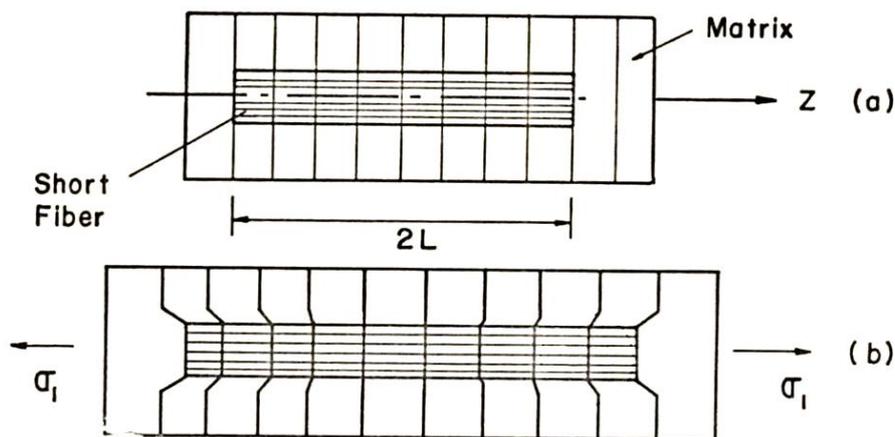


Figura 1. Esquema simplificado do campo de deformações ao redor da fibra. a) sem carregamento.

b) com carregamento. [6]

Da lei de Hooke:

$$\sigma = E\epsilon = \frac{P}{A} = E \frac{\delta}{L} \quad (\text{A})$$

Diferenciando-se:

$$\frac{dP}{dx} = \frac{EA}{L} \cdot \frac{d\delta}{dx} \quad (\text{B})$$

Pode ser dito que a transferência de carga da matriz porosa para a fibra obedece à seguinte equação, segundo Cox [7]:

$$\frac{dP_f}{dx} = B(u - v) \quad (\text{C})$$

Onde P_f é a carga atuante sobre a fibra e B é uma constante que depende do arranjo geométrico dos fibras, do tipo de matriz e dos módulos elásticos da fibra e da matriz.

Diferenciando a Eq. C tem-se:

$$\frac{d^2 P_f}{dx^2} = B \left(\frac{du}{dx} - \frac{dv}{dx} \right) \quad (D)$$

Tem-se que as derivadas de u e v são as deformações sofridas pela fibra e matriz, respectivamente:

$$\frac{du}{dx} = \frac{P_f}{A_f E_f} \quad (E)$$

$$\frac{dv}{dx} = \varepsilon \quad (F)$$

Substituindo-se (E) e (F) em (D), tem-se:

$$\frac{d^2 P_f}{dx^2} = B \left(\frac{P_f}{A_f E_f} - \varepsilon \right) \quad (G)$$

Uma solução da equação diferencial de segunda ordem, não-homogênea e com coeficientes constantes é:

$$P_f = E_f A_f \varepsilon + S \sinh(\beta x) + T \cosh(\beta x) \quad (H)$$

Onde:

$$\beta = \sqrt{\frac{B}{E_f A_f}} \quad (I)$$

De modo a simplificar a solução do problema, ao invés do perfil de tensões proposto por Cox, iremos nos utilizar de um modelo que pressupõe que a queda de tensão na extremidade da fibra segue uma distribuição linear, de modo a simplificar o cálculo da tensão de cisalhamento presente nas extremidades, de modo a se relacionar com o ensaio de *pullout*.

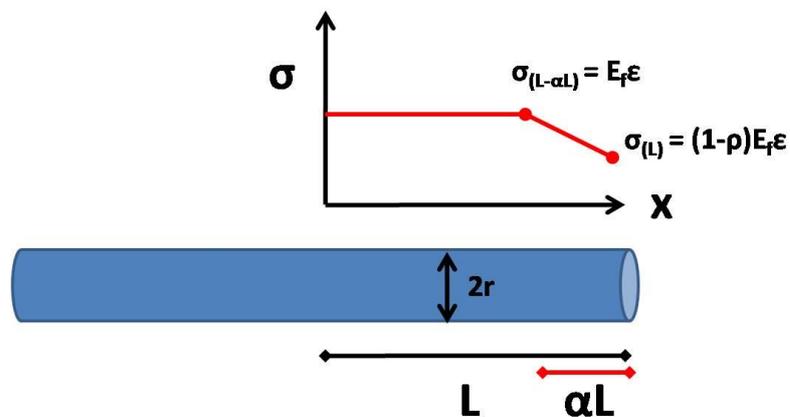
Também de modo a se avaliar o modelo descrito, é possível aplicar as equações desenvolvidas a um compósito fictício, feito de fibras de Alumina em uma matriz porosa de Alumina. A tabela a seguir demonstra as propriedades deste material para a confecção dos gráficos:

Tabela 1. Propriedades do compósito modelo.

Propriedade	Valor
Fração Volumétrica de Fibras	0,45
Porosidade da Matriz	0,24
Comprimento da Fibra – 2L (mm)	50,8
Diâmetro da Fibra (µm)	10
α	0,25

Modelo Linear

Considerando o arranjo da Figura 2, um compósito com fibras de comprimento $2L$, diâmetro $2r$ e módulo de elasticidade E_f , numa matriz com porosidade ρ , do mesmo material da fibra. Definimos aqui o comprimento crítico L_c , onde a partir da ponta da fibra, a distribuição de tensão é desigual pelos efeitos de diferença de deformações entre fibra e matriz nas pontas. Pode se definir a grandeza α como sendo a razão entre o comprimento crítico e metade do comprimento da fibra, sendo assim $L_c = \alpha \cdot L$.

**Figura 2.** Esquema do Modelo Linear

Então, pode ser proposto que a distribuição de tensões entre os pontos $L - \alpha L$ e L segue um comportamento linear como:

$$\sigma_f(x) = Ax + B \quad (J)$$

Utilizando-se das condições de contorno definidas na Figura 2, e as substituindo em (J):

$$E_f \varepsilon = A(L - \alpha L) + B \quad (K)$$

$$(1 - \rho)E_f \varepsilon = AL + B \quad (L)$$

Isolando-se B em (K) e substituindo em (L):

$$(1 - \rho)E_f \varepsilon - AL = E_f \varepsilon - A(L - \alpha L) \quad (M)$$

$$-\rho E_f \varepsilon = A\alpha L \quad (N)$$

Então:

$$A = -\frac{\rho E_f \varepsilon}{\alpha L} \quad (O)$$

Substituindo o valor de A em (L):

$$(1 - \rho)E_f \varepsilon = -\frac{\rho E_f \varepsilon}{\alpha} + B \quad (P)$$

Resolvendo para B:

$$B = \left[1 - \rho \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right)\right] E_f \varepsilon \quad (R)$$

Substituindo A e B em (J), temos a distribuição de tensões (Figura 3):

$$\sigma_f(x) = -\frac{\rho E_f \varepsilon}{\alpha L} x + \left[1 - \rho \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right)\right] E_f \varepsilon \quad (S)$$

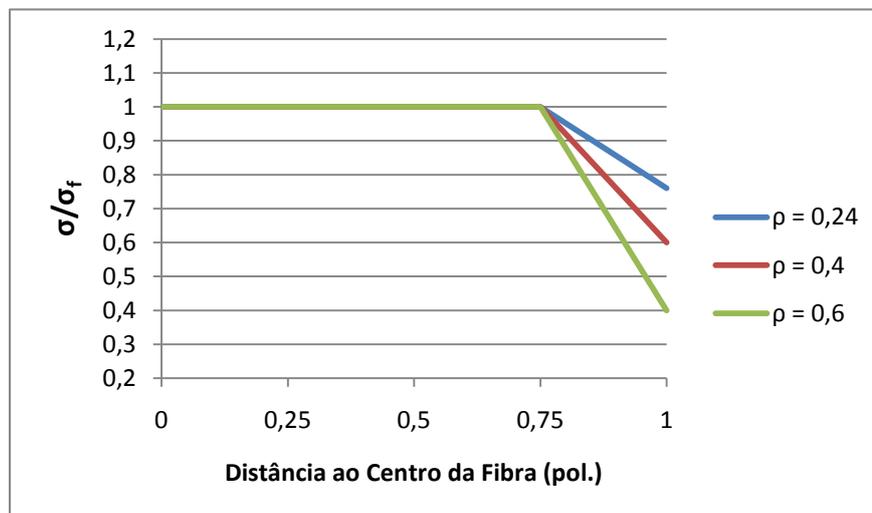


Figura 3. Distribuição de Tensões na Fibra para diferentes porosidades, com $\alpha=0,25$.

De modo a se determinar a tensão de cisalhamento ao longo da fibra, fazemos o equilíbrio de forças em um elemento de fibra como diâmetro $2r$ e comprimento dx na direção x (Figura 4), resultando em:

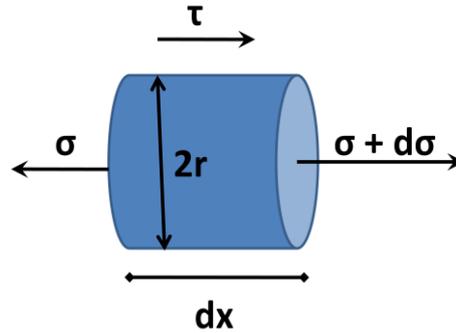


Figura 4. Equilíbrio de tensões em um elemento dx de fibra.

$$\partial\sigma \cdot \pi r^2 + \tau \cdot 2\pi r dx = 0 \quad (T)$$

Resolvendo para τ :

$$\tau = -\frac{r}{2} \frac{d\sigma}{dx} \quad (U)$$

Diferenciando-se (4.18) (Figura 5):

$$\tau_f(x) = \frac{r\rho E_f \varepsilon}{2\alpha L} \quad (V)$$

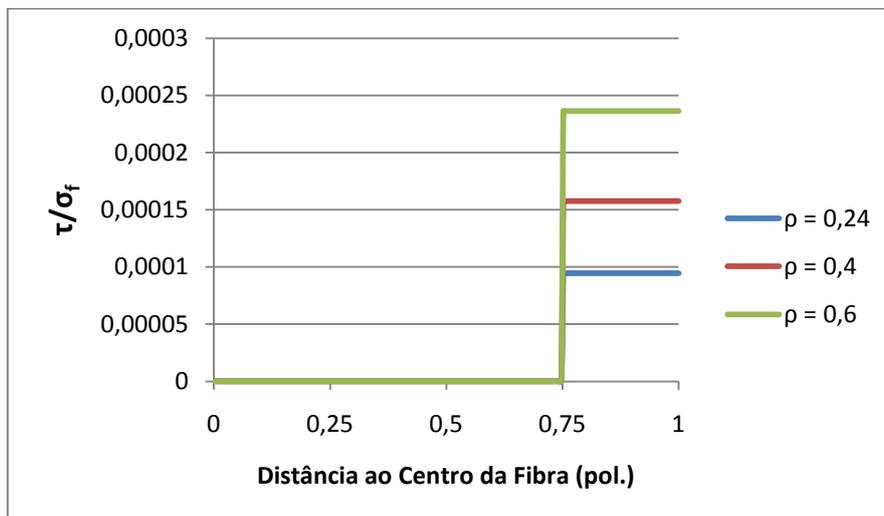


Figura 5. Distribuição de Tensões de Cisalhamento na Fibra para diferentes porosidades, com $\alpha=0,25$.

Também com a distribuição de tensão na fibra, é possível calcular a tensão média suportada pela fibra no compósito, dado pelo valor médio da distribuição de tensão na fibra:

$$\bar{\sigma}_f = \frac{1}{L} \int_0^L \sigma_f(x) dx \quad (X)$$

Para $\alpha \geq 1$, ou seja, a fibra é menor que o comprimento crítico:

$$\bar{\sigma}_f = \frac{1}{L} \int_0^L -\frac{\rho E_f \varepsilon}{\alpha L} x + \left[1 - \rho \left(1 - \frac{1}{\alpha} \right) \right] E_f \varepsilon dx \quad (Y)$$

Então,

$$\bar{\sigma}_f = \left[1 - \rho - \frac{\rho}{2\alpha} \right] E_f \varepsilon \quad (Z)$$

E para $0 < \alpha < 1$, ou seja, a fibra é maior que o comprimento crítico:

$$\bar{\sigma}_f = \frac{\int_0^{L-\alpha L} E_f \varepsilon dx + \int_{L-\alpha L}^L \sigma_f(x) dx}{L} \quad (AA)$$

Substituindo,

$$\bar{\sigma}_f = E_f \varepsilon \left(1 - \frac{\rho \alpha}{2} \right) \quad (AB)$$

Vale notar que no caso crítico de $\alpha=0$, a teoria nos leva ao resultado de fibra contínua.

Com a tensão média definida, podemos calcular as resistências mecânicas do compósito unidirecional nas direções transversal e longitudinal. Quando o material da matriz é o mesmo que o da fibra, é possível escrever o módulo elástico da matriz em função do da fibra:

$$E_m = E_f e^{-bp} \quad (AC)$$

Onde b é um fator que depende da forma e distribuição dos poros.

A resistência do compósito na direção transversal é proporcional a da matriz, dada por:

$$\sigma_T = \sigma_m = E_f \varepsilon e^{-bp} \quad (AD)$$

Já na direção longitudinal, a resistência é o valor médio entre matriz e fibra, baseado nas frações volumétricas de fibra e matriz (Figura 6):

$$\sigma_L = \sigma_m (1 - v_f) + \bar{\sigma}_f v_f = (1 - v_f) E_f \varepsilon e^{-bp} + \bar{\sigma}_f v_f \quad (AE)$$

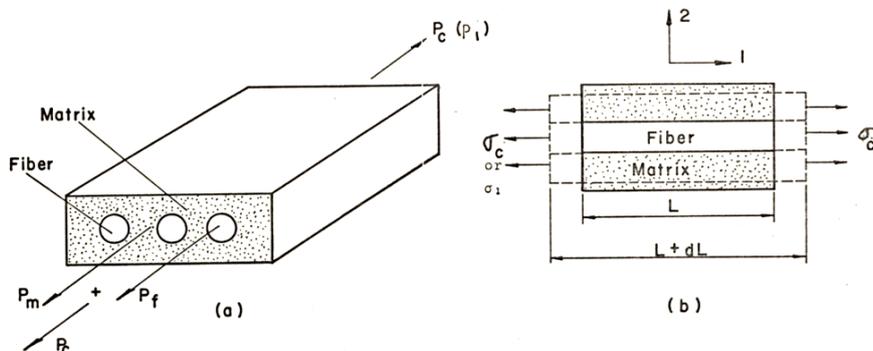


Figura 6. Esquema da Resistência Longitudinal do Compósito.[6]

Portanto, para $0 < \alpha < 1$:

$$\sigma_L = (1 - \nu_f)E_f \varepsilon e^{-bp} + E_f \varepsilon \left(1 - \frac{\rho\alpha}{2}\right) \nu_f \quad (\text{AF})$$

E para $\alpha > 1$:

$$\sigma_L = (1 - \nu_f)E_f \varepsilon e^{-bp} + E_f \varepsilon \left[1 - \rho - \frac{\rho}{2\alpha}\right] \nu_f \quad (\text{AG})$$

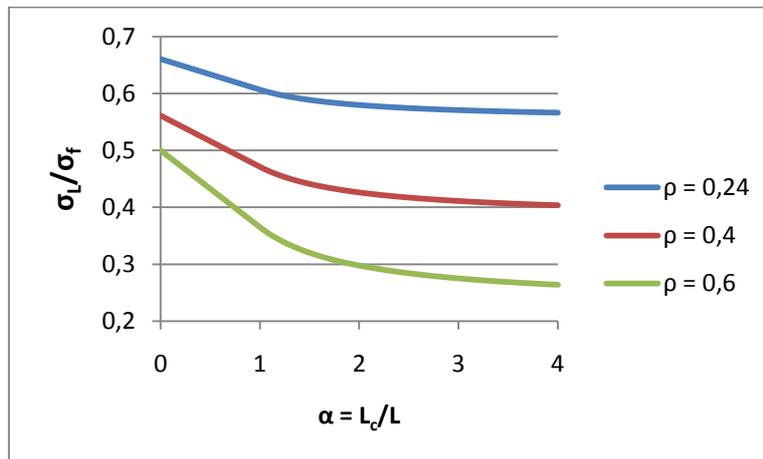


Figura 7. Resistência longitudinal do compósito, para diferentes α .

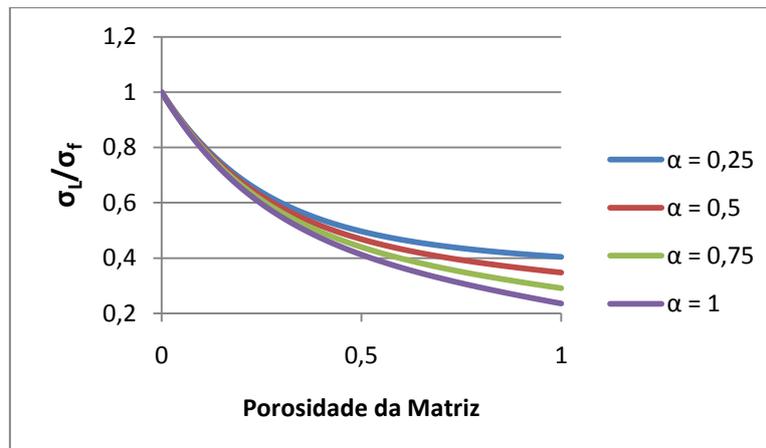


Figura 8. Resistência longitudinal do compósito, para diferentes porosidades.

CONCLUSÃO

Foi proposto um modelo de transferência de carga para compósitos cerâmicos, que relaciona porosidade da matriz e comprimento de fibra com a resistência mecânica de tais compósitos. Espera-se que com a validação experimental do modelo seja possível comprovar o modelo ou realizar quaisquer alterações que visem aumentar a precisão do mesmo.

AGRADECIMENTOS

Os autores gostariam de agradecer à CAPES – Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior e ao CNPq – Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico pelas bolsas dadas aos autores.

REFERÊNCIAS

- [1] JANSSEN, R., SCHEPPOKAT, S., CLAUSSEN, N., "Tailor-made ceramic-based components - Advantages by reactive processing and advanced shaping techniques", **J. Eur. Ceram. Soc**, 28, 2008, 1369-1379.
- [2] JANSSEN, R., HOTZA, D. "**Low-cost and reliable production of oxide ceramic matrix composites**", Projeto Bragecrim, Dezembro de 2008.
- [3] WENDORFF, J., JANSSEN, R., CLAUSSEN, N., "Saphirfaserverstärkung reaktionsgebundener oxider Keramiken", **Verbundwerkstoffe und Werkstoffverbunde**, Hsg.: Ziegler, G., 1996, 421-424
- [4] LUNDBERG, R., ECKERBOM, L., "Design and Processing of Al-Oxide Composites", **Ceramic Transactions**, 58, 1995, 95-104
- [5] LEVI, C.G., YANG, J.Y., DALGLEISH, B.J., ZOK, F.W., EVANS, A.G., "Processing and performance of an all-oxide ceramic composite, " **J. Am. Ceram. Soc**, 81, 1998, 2077-2086.
- [6] CASARIL, A.; GOMES, E.R.; SOARES, M.R.; FREDEL, M.C.; AL-QURESHI, H.A. **Análise micromecânica dos compósitos com fibras curtas e partículas**. Revista Matéria, v.12 n.2, 2007.
- [7] COX, H.L. The elasticity and strength of paper and other fibrous materials. **British Journal of Applied Physics**. 1952, Vol 3, pp. 72-79.

ANALYTICAL MODELING OF LOAD TRANSFER IN CERAMIC-CERAMIC SHORT FIBER COMPOSITES

The aim of this work is to present a model of load transfer between porous matrix and short fibers in Ceramic Matrix Composites. This analysis is based on the earlier shear-lag models used for polymeric composites. However, geometry and strength of fibers in addition to the matrix porosity are included in the present analysis. The theoretical curves for the longitudinal and shear stresses distributions along the fiber -porous matrix interface are presented. They exhibited a maximum strength point at the middle of the short fibers. It became evident that the critical length is governed by the relative properties of the fibers, matrix and porosity, which greatly influenced the load carrying capacity of the fibers in the composites. In addition, the present simplified solution facilitates the understanding of the interface mechanism using porous matrix. Other relevant parameters are also examined.